ECOLE DE L'AIR (Durée : 3 heures 30 - coefficient : 9)

On fera usage des notation suivantes :

IN	ensemble des nombres entiers naturels
IN*	ensemble des nombres entiers naturels strictement positifs
IR	ensemble des nombres réels
IR^+	ensemble des nombres réels positifs ou nuls
IR^{+*}	ensemble des nombres réels positifs non nuls
C	ensemble des nombres complexes
C*	ensemble des nombres complexes non nuls

· On désignera par $\sqrt{z}$ une racine carrée quelconque de $z \in C$, c'est-à-dire un nombre $u \in C$ quelconque tel que $u^2 = z$. Par exemple, on posera indifféremment $\sqrt{4} = 2$ ou $\sqrt{4} = -2$, $\sqrt{-1} = i$ ou $\sqrt{-1} = -i$.

On rappelle la définition des fonctions usuelles suivantes :

- $\forall x \in [-1, 1]$, arcsin x est l'unique valeur de $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ telle que $x = \sin \theta$.
- $\forall x \in [-1, 1]$, arccos x est l'unique valeur de $\theta \in [0, \pi]$ telle que $x = \cos \theta$.

Soit $\varphi(z)$ une fonction bornée, à valeurs réelles de $z \in K$. On désigne par $\sup_{z \in K} \varphi(z)$ la borne supérieure de l'ensemble $\{ \varphi(z) : z \in K \}$ des valeurs prises par φ sur K.
On désigne par ln x le logarithme neperien de x.

Commentaires

Le problème est composé de deux parties pouvant être traitées, pour l'essentiel, de manière indépendante. La première est essentiellement théorique, tandis que la seconde fait principalement appel au calcul numérique et à la programmation.

Première partie

-I-

a) On pose, pour tout $x \in [-1, 1]$ et $n \in IN$, $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$.
Déterminer T_0, T_1, T_2, T_3 et montrer que la suite $\{ T_n , n \geq 0 \}$ vérifie une relation simple de récurrence de la forme :

$$T_{n+1}(x) = a(x)\, T_n(x) + b(x)\, T_{n-1}(x)$$

pour tout $n \in IN^*$ et $x \in [-1, 1]$, où a(x) et b(x) sont des fonctions que l'on précisera.

b) Vérifier que, pour tout $n \in IN^*$, T_n a n racines distinctes $x_{1,n} < x_{2,n} < \ldots < x_{n,n}$ dans l'intervalle [-1, 1] et donner explicitement la valeur de $x_{k,n}$ en fonction de k et n, pour $1 \leq k \leq n$.

c) Montrer que, pour tout $n \in IN$, $T_n(x) = \sum_{m=0}^{n} \lambda_{m,n}\, x^m$ est un polynôme de degré n de la variable x.

Déterminer les valeurs des coefficients $\lambda_{n,n}$ et $\lambda_{0,n}$ désignant respectivement le terme de plus haut degré et le terme constant de ce polynôme.

Dans la suite du problème, on désignera par $T_n(z) = \sum_{m=0}^{n} \lambda_{m,n} z^m$ la valeur prise par le polynôme T_n en $z \in C$. On posera, de plus, pour tout $z \in C$,

$$\tilde{T}_n(z) = \lambda_{n,n}^{-1} T_n(z) = \sum_{m=0}^{n} \frac{\lambda_{m,n}}{\lambda_{n,n}} z^m .$$

-II-

On utilise les mêmes notations que précédemment.

a) Soit $w = u + i v = r e^{i\alpha} \in C^*$, avec $r \in IR^*$ vérifiant $r \geq 1$ et $\alpha \in IR$. On pose

$$z = z(\omega) = x + iy = \frac{1}{2}(w + w^{-1}).$$

On note par $\mathcal{C}_r$ le cercle de rayon r défini dans le plan repéré par (u, v) par $|w| = r$. Déterminer, dans le plan repéré par (x, y), l'image $\mathcal{E}_r$ du cercle $\mathcal{C}_r$ par l'application :

$$w = u + i v \quad \rightarrow \quad z(w) = x + i y.$$

Montrer que $\{\mathcal{E}_r : r > 1\}$ définit une famille d'ellipses dont on déterminera les axes principaux et les foyers. Que peut-on dire de $\mathcal{E}_1$?

b) Montrer que tout $z \in C$ est tel qu'il existe au moins un $w_z \in C$, avec $|w_z| \geq 1$, tel que $z = z(w_z)$.

Pour quelles valeurs de $z \in C$ le nombre w_z est-il unique ?

Pour quelles valeurs de $z \in C$ le nombre w_z est-il tel que $|w_z| > 1$?

c) Soient $w = r e^{i\alpha} \in C^*$, avec $r \in IR^*$, $r \geq 1$ et $\alpha \in IR$, et soit

$$z = z(w) = \frac{1}{2}(w + w^{-1}) = \frac{1}{2}(r e^{i\alpha} + r^{-1} e^{-i\alpha}).$$

Montrer que, pour tout $n \in IN$, $T_n(z) = \frac{1}{2}(r^n e^{ni\alpha} + r^{-n} e^{-ni\alpha})$.

On pourra, par exemple, établir ce résultat en effectuant une récurrence sur n.

d) Montrer que $|T_n(z)|$ et $|\tilde{T}_n(z)|$ s'expriment de façon simple en fonction de $r^{2n} + 2\cos 2n\alpha + r^{-2n}$ et de n.

-III-

On utilise les mêmes notations que précédemment.

a) Soit $z \in C$. Montrer que, si $z \notin [-1, 1]$, alors la limite $\sigma(z) = \lim_{n \to \infty} \left| \prod_{k=1}^{n} (z - x_{k,n}) \right|^{\frac{1}{n}}$ existe, et déterminer sa valeur en fonction de z.

b) Etudier la convergence de l'intégrale $\int_0^1 \ln |\cos \pi u| \, du$.

c) Que peut-on dire du comportement limite lorsque $n \to \infty$ des suites

$$\left\{ \prod_{k=1}^{2n} |x_{k,2n}|^{\frac{1}{2n}} : n \geq 1 \right\} \quad \text{et} \quad \left\{ \prod_{k=1}^{2n+1} |x_{k,2n+1}|^{\frac{1}{2n+1}} : n \geq 1 \right\} \ ?$$

d) Montrer l'inégalité, pour tout $z \in [-1, 1]$, $\left| \prod_{k=1}^{n} (z - x_{k,n}) \right| \leq 2^{-n+1}$.

La limite $\sigma(z) = \lim_{n \to \infty} \left| \prod_{k=1}^{n} (z - x_{k,n}) \right|^{\frac{1}{n}}$ est-elle définie pour tout $z \in [-1, 1]$?

-IV-

On considère la suite double $\{y_{k,n} : 0 \leq k \leq n, n \geq 1\}$, définie par $y_{k,n} = -1 + \frac{2k}{n}$, $0 \leq k \leq n$, $n \geq 1$.

a) Montrer que, pour tout $z \in C$ avec $z \notin [-1, 1]$, la limite $s(z) = \lim_{n \to \infty} \left| \prod_{k=0}^{n} (z - y_{k,n}) \right|^{\frac{1}{n+1}}$ existe et est finie.

b) La limite s(z) est-elle toujours définie pour $z \in [0, 1]$?

-V-

On considère une suite $\{z_n : n \geq 1\}$ dans le corps des complexes C, possédant la propriété suivante. Il existe N nombres complexes $\zeta_1, \ldots, \zeta_N \in C$ $(N \geq 1)$ tels que

$$\lim_{n \to \infty} z_{nN+m} = \zeta_m \quad \text{pour } m = 1, \ldots, N.$$

Soit $K \subseteq C$, une partie de C. On suppose qu'il existe des constantes réelles c, d avec $0 < c \leq d < \infty$, telles que, pour tout $z \in K$ et $m = 1, \ldots, N$,

$$c \leq |z - \zeta_m| \leq d \quad \text{et} \quad c \leq |z - z_n| \leq d.$$

Montrer que

$$\lim_{n \to \infty} \left(\sup_{z \in K} \left| \left| \prod_{k=1}^{n} (z - z_k) \right|^{\frac{1}{n}} - \prod_{m=1}^{N} |z - \zeta_m|^{\frac{1}{N}} \right| \right) = 0.$$

-VI-

On utilise les mêmes notations que précédemment.

Soit f une fonction réelle de variable réelle. On suppose que :

(i) Pour tout $n \geq 1$, f est n fois dérivable sur IR. On note $f^{(n)}$ sa dérivée $n^{ième}$;

(ii) Il existe $r < 2$ et $\gamma < \infty$ tels que, pour tout $n \geq 1$, $\sup_{t\in[-2, 2]} | f^{(n)}(t) | \leq \gamma r^n n!$.

Pour $N \geq 0$, on considère $N + 1$ points distincts $\theta_0, ..., \theta_N$ de l'intervalle $[-1, 1]$.

a) Montrer qu'il existe un unique polynôme $P_N(f;x)$, de degré au plus égal à N, tel que

$$P_N(f; \theta_m) = f(\theta_m) \quad \text{pour } m = 0, ..., N.$$

b) On considère la fonction de $x \in IR - \{ \theta_0, \theta_1, ..., \theta_N \}$,

$$H(x) = \frac{f(x) - P_N(f; x)}{(x - \theta_0)(x - \theta_1)...(x - \theta_N)},$$

et, pour x réel donné, la fonction de $t \in IR$,

$$W(t) = f(t) - P_N(f; t) - (t - \theta_0)(t - \theta_1)...(t - \theta_N) H(x).$$

Pour x réel fixé, on pose $c = \min\{x, \theta_0, \theta_1, ..., \theta_N\}$ et $d = \max\{x, \theta_0, \theta_1, ..., \theta_N\}$. Montrer qu'il existe un nombre ξ, dépendant de x, appartenant à l'intervalle $]c, d[$, et tel que $W^{(N+1)}(\xi) = 0$.

En déduire que

$$f(x) - P_N(f; x) = \frac{(x - \theta_0)(x - \theta_1)...(x - \theta_N)}{(N+1)!} f^{(N+1)}(\xi).$$

c) Pour tout $n \geq 0$, on désigne par $Q_n(x)$ le polynôme $P_n(f; x)$ obtenu comme au (VI-b) avec les choix particuliers de $\theta_k = x_{k+1, n+1}$ pour $k = 0, 1, ..., n$ avec les $x_{k+1, n+1}$ définies comme au (I-a).

Montrer qu'il existe un intervalle $[-M, M]$ avec $M > 1$ tel que $\lim_{n \to \infty} (\sup_{x \in [-M, M]} |f(x) - Q_n(x)|) = 0$.

Deuxième partie

On considère la fonction $f(x) = \cosh x = \frac{1}{2} (e^x + e^{-x})$.

Commentaires

Le but de cette partie est d'évaluer numériquement, à l'aide d'algorithmes programmés, certaines grandeurs liées à f. Pour cela, il est demandé au candidat de donner pour chacune des questions concernées :

- l'énoncé complet, en majuscules, du programme utilisé. Celui-ci devra être rédigé dans un langage de programmation qui sera explicitement précisé sur la copie. Le candidat pourra utiliser un langage de son choix (de préférence proche du Pascal) parmi les langages de programmation usuels.

Il pourra, en particulier faire usage du langage correspondant à la calculatrice programmable dont il dispose s'il utilise celle-ci pour réaliser par la suite les calculs numériques demandés par l'énoncé.

- la structure de l'algorithme utilisé.
- la justification théorique de la validité des résultats fournis par l'exécution de l'algorithme.

Tout programme :

- ne répondant pas aux critères ci-dessus, ou
- comprenant une faute de syntaxe, ou
- ne pouvant être confirmé par au moins une exécution numérique correcte correspondant à l'une des applications demandées,

pourra être considéré comme ne répondant pas aux questions de l'énoncé.

-I-

a) Déterminer le polynôme $Q_2(x)$ de degré 2, qui coïncide avec f(x) aux points $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $x = 0$.

b) Etablir un programme permettant de calculer des valeurs approchées de f(x) et $Q_2(x)$ à 10^{-6} près, pour tout $x \in [-2, 2]$.

-II-

a) Etablir un programme permettant de calculer, pour tout $M \in [0, 2]$ la valeur de $\Delta(M)$ définie par :

$$\Delta(M) = \sup_{x \in [-M,M]} | f(x) - Q_2(x) | \quad \text{à } 10^{-4} \text{ près.}$$

b) Comparer la valeur approchée de $\Delta(1)$ obtenue à l'aide du programme précédent avec une borne supérieure théorique calculée obtenue à l'aide des résultats de la partie I.

-III-

Soit (Γ) le lieu géométrique, dans le plan xOy, défini par $\left|z - \frac{1}{\sqrt{2}}\right| \left|z + \frac{1}{\sqrt{2}}\right| = \frac{1}{2}$ où $z = x + i\,y$.

a) Etablir un programme permettant de calculer, à l'aide d'une représentation paramétrique surjective, $t \in [A, B] \rightarrow (x(t),y(t)) \in (\Gamma)$, pour tout $t \in [A, B]$ (à la précision de la machine près).

b) Construire la courbe (Γ), en tabulant au moins dix valeurs de (x(t), y(t)) à 10^{-2} près.